第4讲 一元二次方程的概念

**知识梳理**

**1.一元二次方程的概念**

经过合并同类项后，只含有一个未知数，且未知数的最高次数是2的整式方程叫做**一元二次方程**.

**2.一元二次方程的特点**

(1)只含有\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_未知数.

(2)未知数的最高次数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

(3)是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.要判断一个方程是否为一元二次方程，先看它是否为整式方程，若是，再对它进行整理.如果能整理为的形式，则这个方程就为一元二次方程.

总之，一元二次方程要同时满足以上三条，缺一不可.

**3.一元二次方程的一般形式**

任何一个关于*x*的一元二次方程都可以化成*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*的形式，这种形式简称一元二次方程的**一般式**.其中*ax*2叫做\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，*a*是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；*bx*叫做\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，*b*是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；*c*叫做\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【温馨提示】(1)只有当*a*≠0时，方程*ax*2+*bx*+*c*=0才是一元二次方程.

(2)如果明确指出方程*ax*2+*bx*+*c*=0是一元二次方程，那么就隐含了*a*≠0这一重要条件；如果出现“关于*x*的方程*ax*2+*bx*+*c*=0”这样的语句，就要对方程的字母系数进行讨论.

(3)在求一元二次方程各项系数时，首先把一元二次方程化成一般形式.如果在一般形式中二次项系数为负，最好在方程左右两边同乘-1，使二次项系数为正数.

(4)指出一元二次方程的各项系数时，一定要带上前面的符号.

**4.一元二次方程的解(根)**

使一元二次方程左、右两边**相等**的未知数的值叫做一元二次方程的解，也叫做一元二次方程的根.

【拓展延伸】对于一元二次方程的根(解)应从以下两个方面把握：

(1)一元二次方程可以无解，但是有解就一定有两个；

(2)检验一个数是否为一元二次方程解的方法：将该数代入方程检验，如果该数使等号两边相等，则该数就是方程的根(解)，如果该数使等号两边不相等，则该数就不是方程的根(解).

**5.关于一元二次方程根的重要结论**

(1)若*a*+*b*+*c*=0，则一元二次方程*ax*2+*bx*+*c*=0(*a*≠0)必有一个根是*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*；反之也成立，即若*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*是一元二次方程*ax*2+*bx*+*c*=0(*a*≠0)的一个根，那么*a*+*b*+*c*=0：

(2)若*a*-*b*+*c*=0，则一元二次方程*ax*2+*bx*+*c*=0(*a*≠0)必有一个根是*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*；反之也成立，即若*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*是一元二次方程*ax*2+*bx*+*c*=0(*a*≠0)的一个根，那么*a*-*b*+*c*=0；

(3)若一元二次方程*ax*2+*bx*+*c*=0(*a*≠0)有一个根是*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*，那么*c*=0；反之也成立，即若*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*，那么一元二次方程*ax*2+*bx*+*c*=0(*a*≠0)必有一个根是*x*=0.

**典型解析**

**例1：**判断下列方程是否为一元二次方程：

(1)*m*2+*m*=1；(2)*x*2=0；(3)*x*2-2*x*+3*y*=0；(4)*x*2-3=(*x*-1)(*x*-4)；(5)*ax*2+*bx*+*c*=0；

(6)；(7)；(8)*x*2=-1；(9)*mx*2=0(*m*是不为零的常数).

[答案]方程(1)、(2)、(8)、(9)是一元二次方程.

**【变式训练】**

下列方程中，一定是一元二次方程的是( ).

C.(*x*-2)(*x*+2)=1 D.*x*2-2*y*=1

答案：C [提示]A项不是整式方程，B项未知数最高次数不是2，D项含有*x*，*y*两个未知数.

**例2：**把下列一元二次方程化成一般式，并写出方程中的各项与各项的系数.

(1)*x*(*x*-2)=4*x*2-3*x*； (2)(*x*+8)2=4*x*+(2*x*-1)2；

； (4)*a*(*x*-*b*)2=*c*(*ab*≠0).

[解析]首先要对三个方程进行整理，通过去分母、去括号、移项、合并同类项等变形，化为一般形式，再指出二次项系数、一次项系数和常数项.

[解](1)去括号，得*x*2-2*x*=4*x*2-3*x*，

移项、合并同类项，得3*x*2-*x*=0.

二次项系数为3，一次项系数为-1，常数项为0.

(2)去括号，得*x*2+16*x*+64=4*x*2+1，

移项、合并同类项，得3*x*2-16*x*-63=0.

二次项系数为3，一次项系数为-16，常数项为-63.

(3)去分母，得2*x*2-3(*x*+1)=-3*x*-3，

去括号、移项、合并同类项，得2*x*2=0.

二次项系数为2，一次项系数为0，常数项为0.

[点评]一元二次方程化为一般形式后，若没有出现一次项*bx*，则*b*=0；若没有出现常数项*c*，则*c*=0.要注意二次项、二次项系数是两个不同的概念.

解：(4)原方程可化为*ax*2-2*abx*+*ab*2-*c*=0.

二次项：*ax*2；二次项系数：*a*；

一次项：-2*abx*；一次项系数：-2*ab*；

常数项：*ab*2-*c*.

**例3：**(1)*m*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，关于*x*的方程(*m*-2)*x*|*m*|-(*m*+3)*x*=1是一元二次方程.

[正解]∵(*m*-2)*x*|*m*|-(*m*+3)*x*=1是关于*x*的一元二次方程，∴|*m*|=2，∴*m*=±2.又∵*m*-2≠0，∴*m*≠2，因此*m*=-2.

[点评]先由题目所含的条件求出待定字母的值，再由二次项系数不为0舍去不合题意的值.

(2)已知关于*x*的方程(*m*+2)+3*x*+*m*=0是一元二次方程，求*m*的值.

答案：由题意得解得*m*=2.

**例4：**下面哪些数是方程*x*2+*x*-6=0的根？

-4，-3，2，3.

[解析]把-4代入*x*2+*x*-6得(-4)2+(-4)-6=6，-4不是方程的根；

把-3代入*x*2+*x*-6，得(-3)2+(-3)-6=0，-3是方程的根；

把2代入*x*2+*x*-6，得22+2-6=0，2是方程的根；

把3代入*x*2+*x*-6，得32+3-6=6，3不是方程的根.

[解]-3，2是方程*x*2+*x*-6=0的根.

[规律总结]代入法是常用的检验根的方法，用代入法可求方程中字母系数或字母常数的值.这种方法可用于选择题，加快做题速度.

**例5：**(1)若关于*x*的一元二次方程2*x*2+*mx*-1=0的一个根是3，求*m*的值.

解：因为方程2*x*2+*mx*-1=0的一个根是3，所以

2×32+*m*×3-1=0.

解得

(2)已知关于*x*的方程(*a*-1)*x*2+*x*+*a*2-1=0有一个根是0，求*a*的值.

**解：**因为关于*x*的方程(*a*-1)*x*2+*x*+*a*2-1=0有一个根是0，所以(*a*-1)×02+0+*a*2-1=0.

解得*a*=±1.

思考：这里为什么没有考虑*a*-1≠0?

【当*a*-1=0，即*a*=1时，这个方程可化为一元一次方程，也有一个根是0，符合题意.】

**【变式训练】**

若关于*x*的一元二次方程(*m*-1)*x*2+*x*+|*m*|-1=0有一个根为0，则*m*的值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：-1 [提示]由方程根的定义知|*m*|-1=0，∴*m*=±1，又*m*-1≠0，∴*m*=-1.

**例6：**若*a*-*b*+*c*=0，则一元二次方程*ax*2+*bx*+*c*=0(*a*≠0)必有一解为*x*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；若4*a*+2*b*+*c*=0，则上述方程必有一解为*x*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：-1；2 [提示]将*x*=-1，*x*=2分别代入*ax*2+*bx*+*c*=0，检验知，当*a*-*b*+*c*=0时，*x*=-1是方程的根；当4*a*+2*b*+*c*=0时，*x*=2是方程的根.

**例7：**一元二次方程*ax*2+*bx*+*c*=0的一个根是1，且*a*、*b*满足等式求此一元二次方程.

[解]因为方程*ax*2+*bx*+*c*=0的一个根是1，

所以将*x*=1代入方程，可得*a*+*b*+*c*=0.①

又因为*a*-2≥0，2-*a*≥0，解得*a*=2.

则

把*a*=2，*b*=-1代入方程①中，得*c*=-1.

所以所求一元二次方程为2*x*2-*x*-1=0.

[点评](1)注意本题的隐含条件：即*a*=2.(2)方程的根就是满足方程的*x*的值，当条件中给出方程的一个根时，通常将此根代入方程，以确定待定系数.

**例8：**已知两个一元二次方程有一个公共根1.求证：一元二次方程也有一个根是1.

**解：**因为1是两个方程的公共根，所以

①+②，得2+(*a*+*c*)+(*b*+*d*)=0.把*x*=1代入方程的左边，得

左边

因此，二次方程也有一个根是1.

**例9：**已知*a*是方程的一个根，求的值.

答案： 2017. 提示：*a*2-2018*a*+1=0，则*a*2-2017*a*=*a*-1，*a*2+1=2018*a*，所以原式=

=2017

**【变式训练】**

已知：*a*2-3*a*+1=0，则的值为( ).

A. B.1 C.-1 D.-5

答案：B [提示]∵*a*2-3*a*+1=0，且*a*≠0则原式=3-2=1.

**例10：**已知方程的两根和为*S*1，两根的平方和为*S*2，两根的立方和为*S*3，求*aS*3+*bS*2+*cS*1的值.

答案：0.提示：设方程*ax*2+*bx*+*c*=0的两根为*x*1、*x*2，则

*ax*12+*bx*1+*c*=0，*ax*22+*bx*2+*c*=0.

所以，*aS*3+*bS*2+*cS*1

=(*ax*12+*bx*12+*cx*1)+(*ax*23+*bx*22+*cx*2)

=*x*1(*ax*12+*bx*1+*c*)+*x*2(*ax*22+*bx*2+*c*)

=0

**同步训练**

**一、填空题**

1.当*m*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，方程是关于*x*的一元二次方程.

**答案：**≠±1

2.一元二次方程3*x*2+2*x*-5=0的一次项系数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：2 [提示]由一元二次方程一次项系数概念易得出.

3.若一元二次方程的各项系数的和是则*a*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：

4.若*b*=*a*+*c*，则一元二次方程*ax*2+*bx*+*c*=0必有一个实数根是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

5.已知*x*=1是一元二次方程*x*2+*ax*+*b*=0的一个根，则代数式*a*2+*b*2+2*ab*的值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

[解析]先由一元二次方程根的定义建立*a*、*b*之间的关系，然后将待求式变形为(*a*+*b*)2后，再整体代换即可.

由一元二次方程根的定义知12+*a*+*b*=0，∴*a*+*b*+1=0，即*a*+*b*=-1，∴*a*2+*b*2+2*ab*=(*a*+*b*)2=(-1)2=1.

[答案]1

6.若关于*x*的方程3*x*2+*mx*=2*x*+5不含一次项，则*m*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：2 [提示]原方程化为一般形式得3*x*2+(*m*-2)*x*-5=0，令*m*-2=0得*m*=2.

7.若*ax*2-5*x*+1=0是一元二次方程，则不等式2*a*+6>0的解集是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：*a*>-3且*a*≠0 [提示]∵*ax*2-5*x*+1=0是一元二次方程，∴*a*≠0，又2*a*+6>0，∴*a*>-3，因此不等式的解集为*a*>-3且*a*≠0.

8.某种花卉每盆的盈利与每盆的株数有一定的关系，每盆植3株时，平均每株盈利4元；若每盆增加1株，平均每株盈利减少0.5元，要使每盆的盈利达到15元，每盆应多植多少株？设每盆多植*x*株，则可以列出的方程是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

[答案] (3+*x*)(4-0.5*x*)=15

**二、选择题**

9.你认为方程*x*2+2*x*-3=0的解应该是( ).

A.1 B.-3 C.3 D.1或-3

答案：D [提示]分别将数值代入方程中检验，注意一元二次方程若有实数根，一定有两个.

10.已知*a*+*b*+*c*=0，则关于*x*的方程*ax*2+*bx*+*c*=0(*a*≠0)必有一根为( ).

A.*x*=0 B.*x*=-1 C.*x*=1 D.*x*=2

答案：C [提示]把*x*=1代入一元二次方程，可得*a*+*b*+*c*=0，因此*x*=1能使这个一元二次方程左右两边相等，所以*x*=1是一元二次方程的解.

**三、解答题**

11.写出一个关于*x*的一元二次方程，使它分别满足以下条件：

(1)二次项系数是5，一次项系数是其中有一个根是2；

(2)二次项系数是1，各项系数和为0；

(3)有一个根等于0.

12.已知*m*、*n*都是方程*x*2+2015*x*-2016=0的根，试求代数式(*m*2+2015*m*-2015)(*n*2+2015*n*+2015)的值.

答案：将*m*，*n*分别代入方程*x*2+2015*x*-2016=0中，

得*m*2+2015*m*-2016=0，*n*2+2015*n*-2016=0，

∴*m*2+2015*m*=2016，*n*2+2015*n*=2016.

∴(*m*2+2015*m*-2015)(*n*2+2015*n*+2015)=(2016-2015)(2016+2015)=4031.

**三角形复习**

1．已知：*AC*平分∠*BAD*，*CE*⊥*AB*，∠*B*+∠*D*=180°，求证：*AE*=*AD*+*BE*.



**证明：**在*AE*上取*F*，使*EF*＝*EB*，连接*CF*

∵*CE*⊥*AB*

∴∠*CEB*＝∠*CEF*＝90°

∵*EB*＝*EF*，*CE*＝*CE*，

∴△*CEB*≌△*CEF*

∴∠*B*＝∠*CFE*

∵∠*B*＋∠*D*＝180°，∠*CFE*＋∠*CFA*＝180°

∴∠*D*＝∠*CFA*

∵*AC*平分∠*BAD*

∴∠*DAC*＝∠*FAC*

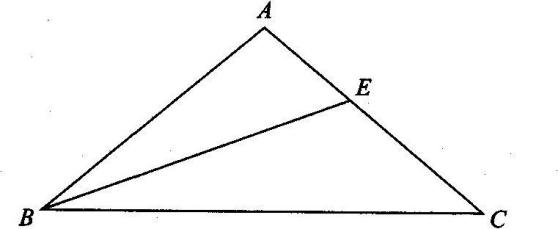
∵*AC*＝*AC*

∴△*ADC*≌△*AFC*（*SAS*）

∴*AD*＝*AF*

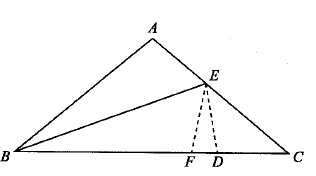
∴*AE*＝*AF*＋*FE*＝*AD*＋*BE*

2．如图所示，在等腰△*ABC*中，*AB*=*AC*，顶角∠*A*=100°，∠*B*的平分线*BE*交*AC*于*E*，求证：*BC*=*AE*＋*EB*.



**满分证明：**如图所示，在*BC*上取*BD*=*BE*，*BF*=*AB*.

由条件*AB*=*BF*、*BE*=*BE*、∠*ABE*=∠*EBC*=20°，易证△*ABE*≌△*FBE*.

因此∠*BFE*=100°，故∠*BEF*=60°，∠*EFD*=80°.

又由于*BD*=*BE*，可得∠*BED*=∠*BDE*=80°，∠*FED*=∠*BED*－∠*BEF*=20°，

故∠*EFD*=∠*EDF*，*EF*=*ED*.

由于∠*DEC*=180°－∠*BEA*－∠*BED*=40°=∠*C*，所以*ED*=*CD*，即*CD*=*EF*=*AE*.

由*BC*=*BD*＋*CD*，*BD*=*EB*，得*BC*=*AE*＋*EB*.

**技巧贴士**

本题运用“截长法”，把最长的*BC*截取题中所要求的其中一段，如*BD*=*BE*，至于*BF*=*AB*的出现则在于从∠*B*的角平分线得到启示，看到角平分线，往往意味着三角形翻折，△*ABE*≌△*FBE*也可认为两三角形翻折(相等会为全等提供可能性)，并且出现等腰三角形往往还意味着存在等量代换.